Colles de Maths - semaine 7 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Fonctions convexes

Exercice 1
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in [0,1],\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant $f'' \geq \alpha$. Montrer que f possède un unique minimum local et global. Qu'en est-il si on suppose seulement que $f'' > 0$?

Exercice 3
Soit $I \subseteq \mathbb{R}_+^*$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto x\,f(x)$ est convexe si et seulement si $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ l'est.

Espaces préhilbertiens

Exercice 4
Calculer

$$\inf_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-x}\left(1 + a_1 x + \ldots + a_n x^n\right)^2 dx.$$

Indication : On pourra utiliser la formule $\displaystyle\int_0^{\infty} x^k e^{-x}\,dx = k!$ pour tout $k \geqslant 0$.

Exercice 5
Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $|||u||| \leqslant 1$.
Montrer que la suite $\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p} u_k\right)_p$ converge vers le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
Indication : On pourra commencer par montrer que $E = \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.

Exercice 6
Soit E un espace euclidien, C un convexe fermé non vide de E, $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe un unique $p(x) \in C$ tel que $||x - p(x)|| = d(x, C)$.
   Indication : Pour l'unicité, on pourra utiliser l'identité du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme, $2\,AB^2 + 2\,BC^2 = AC^2 + BD^2$.
2. Montrer que pour tout $y \in C$, on a $\langle x - p(x), y - p(x)\rangle \leqslant 0$.
3. Montrer que l'application p est 1-lipschitzienne.

Bonus : Montrer par des contre-exemples la nécessité des hypothèses.